Title	四次元から見たunknotting operations II(結び目の変形に関する研究)
Author(s)	宮崎, 桂
Citation	数理解析研究所講究録 (1992), 813: 35-44
Issue Date	1992-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/83061
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
813巻 1992年 35-44

四次元から見たunknotting operations II

津田塾大 宮崎 桂
(Katura Miyazaki)

Knot K_0 にある local move を施して K_1 が得られたとき、K_0 から K_1 への変化は homotopy $h_t : S^1 \longrightarrow S^3$ とみなせることが多い。homotopy h_t の"軌跡" $A' = \{(h_t(x), t) \mid x \in S^1,\ t \in I\} \subset S^3 \times I$ は $K_0 \subset S^3 \times 0$ と $K_1 \subset S^3 \times 1$ を結ぶ immersed annulus in $S^3 \times I$ である。一般に A' は embedding ではないが、適当な操作で自己交差を取り除くと $\exists$ 4-mfd 内の embedded annulus になる。そこで 4-mfd 内の surface の性質に関する諸結果を用いると、K_0 と K_1 の"差異"を見積ることができる。例えば K_0 と K_1 を signature で区別するには次の定理が有効である。

1 Rochlin's genus theorem の relative version

Th 1 [Viro] [Gilmer]

M^4 closed oriented 4-mfd
$\cup$
B^4 : 4-ball　　　k : knot in ∂B^4
k は $X \equiv M^4 - \mathrm{int}\, B^4$ で properly embedded oriented surface F をはっている。
$\xi = [F, \partial F] \in H_2(X, \partial X)$ が自然数 m で割り切れるとき 次の不等式が成立する。

$m = 2$ のとき $\left| \dfrac{\xi \cdot \xi}{2} - \sigma(X) + \sigma(k) \right| \leq b_2(X) + b_1(F)$

m が奇素数 p の巾のとき

$$\left| \frac{\xi \cdot \xi \, (p^2 - 1)}{2 p^2} - \sigma(X) + \sigma_p(k) \right| \leq b_2(X) + b_1(F)$$

注意 (1) σ_p は次のように定義される Tristram の p-signature.
$z = \exp\left(2\pi i \times \dfrac{p-1}{2p}\right)$、$V$ = knot k の Seifert matrix としたとき、$\sigma_p(k)$ は Hermitian 行列 $(1 - z)V + (1 - \bar{z})V^T$ の signature。

$p = 2$ のとき σ_2 = 通常の signature と定めておく。

(2) $X = B^4$ のときは よく知られた不等式 $|\sigma_p(k)| \leq b_1(F)$ になる。

(3) $\partial X=\phi$, $\partial F=\phi$ のとき、$\sigma(k)$ or $\sigma_p(k)=0$ とすると、定理1は Rochlin's genus theorem (cf. [安原] 定理3) にほかならない。つまり定理1は Rochlin's genus th の relative version といえる。

(4) P. Gilmer は さらに一般に、$F\cap\partial X$ が link になる場合も考えている。(Murasugi-Tristram 不等式の拡張)

2 Signature の変化

[安原] は 素数 p に対し local move $\#^p$ を定義している。前節の Th1を用いて、$\#^p$-move での signature の変化を評価してみる。

Prop 2 $K_0 \xrightarrow{\#^p} K_1$ ($\#^p$-move を1回施す) とき、[安原] で定義された $\varphi_{(K_0,p)}(K_1)$ を $\varphi_{K_0}(K_1)$ と略すと次の不等式が成立する。

$p=2$ のとき $$|\varphi_{K_0}(K_1)-\sigma(K_1)+\sigma(K_0)|\leq 2$$

p が奇数のとき $$\left|\frac{p^2-1}{p^2}\varphi_{K_0}(K_1)-\sigma_p(K_1)+\sigma_p(K_0)\right|\leq 2$$

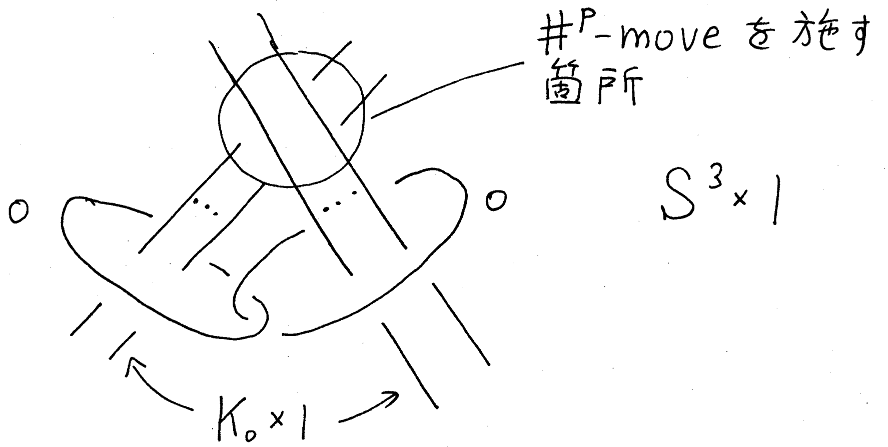
注意 #-unknotting operation は、$\varphi=\pm4$ となる $\#^2$-move の一例。このとき $|\pm4-\sigma(K_1)+\sigma(K_0)|\leq 2$.
path move は $\varphi=0$ となる $\#^2$-move の一例。
よって $|\sigma(K_1)-\sigma(K_0)|\leq 2$.
これら #-unknotting operation と path move

の signature の変化公式は、各々 [Murakami] [Wong] によって Seifert surface を用いて求められている。

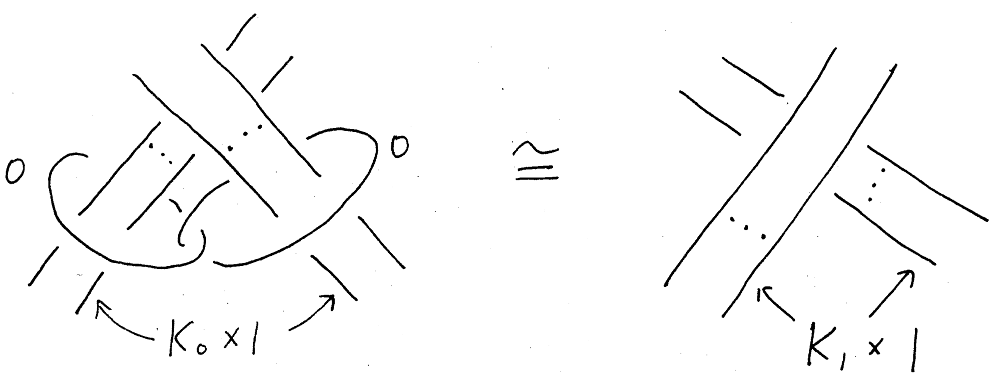
<u>Proof of Prop 2</u>

$S^3 \times I$ の向きを $S^3 \times 1$ に S^3 の標準的向きが導かれるように定めておく。$A = K_0 \times I$ とおく。

$M^4 \equiv S^3 \times I \cup (\bigcup_{i=1}^{2} h_i^2)$ ここで 2-handle h_i^2 は $S^3 \times 1$ の下図の位置に 0-framing でつける。



[安原] の Fig 2 が示すように 3次元球面内の knot としては



また明らかに $M^4 \cong S^2 \times S^2 - \mathrm{int}(B_0^4 \amalg B_1^4)$。

向きまで考えにいれると、$\partial M^4 \cong -\partial B_0^4 \amalg -\partial B_1^4$

なので結局 $A \cap \partial B_0^4 = K_0 \subset \partial B_0^4$

$A \cap \partial B_1^4 = -K_1^! \subset \partial B_1^4$ である。

$\xi = [A, \partial A] \in H_2(M, \partial M)$ は p でわりきれ

$\xi \cdot \xi = 2\varphi_{K_0}(K_1)$。

γ を A 上の arc で ∂A の components をつなぐものとする。$X^4 \equiv M^4 - \mathrm{int}\, N(\gamma)$ $D \equiv A - \mathrm{int}\, N(\gamma)$ とおくと、

$$\begin{cases} X^4 \cong S^2 \times S^2 - \mathrm{int}\, B^4 \\ \partial D = K_0 \# -K_1^! \text{ in } \partial B^4 \\ D \cdot D = 2\varphi_{K_0}(K_1) \end{cases}$$

ここに Th 1 を使えば Prop 2 が得られる。 ▨

Twisting についても、p-signature の公式を Th 1 を用いて導くことは可能。しかしこの場合は、次の Litherland による評価式の方が精密である。

<u>Th 3</u> ℓ を trivial knot で $lk(K_0, \ell) = \omega$ とする。

[Litherland] ℓ に沿う $\frac{1}{n}$-Dehn surgery の結果 K_0 から得られる knot を K_1 と呼ぶ。奇素数 p が ω をわりきるとき、

$$\left|\frac{(p^2-1)n\omega^2}{2p^2} - \operatorname{sgn} n - \sigma_p(K_1) + \sigma_p(K_0)\right| \leq 1.$$

ω が偶数のときは、$\frac{p^2-1}{2p^2}$ を $\frac{1}{2}$ に、σ_p を σ に変えた式が成立する。

注意　Th 3 も Th 1 も branched covering space に G-signature theorem を用いて証明するというアイデアは共通している。ただ、Th 1 の方が twisting に限らない状況にも適用できる分だけ、Th 1 を用いて twisting と signature の関係式を導くと、Th 3 の評価より甘くなってしまう。

Th 3 の系として

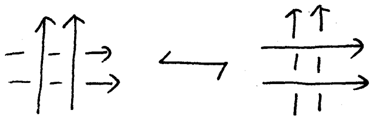
Cor 4　($\omega \geqq 3$) 又は ($|n| \geqq 2$ かつ $\omega = 2$) のとき K_1 と K_0 は (異なる p-signature を持つので) cobordant ではない。

3. $\#^p$-unknotting number が 1 でない knot

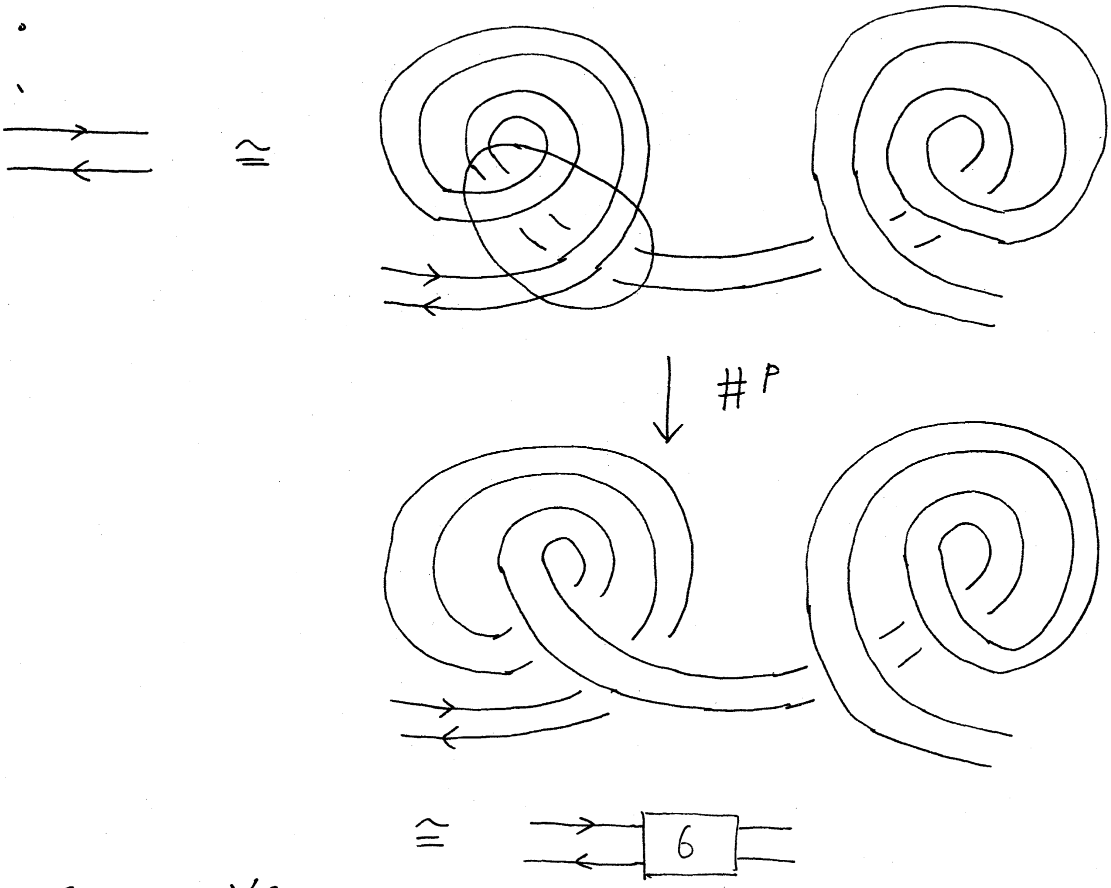
[安原] で証明なしに述べられているように、$\#^p$-move は unknotting operation である。Prop 2 からわかるように p が大きくなると $\#^p$-move の前後の p-signature の変化も大きくなりうる。よって与えられた knot の $\#^p$-unknotting number はある p について 1 でなくとももっと大きい p については 1 になるかもしれない。ここでは、どんな $\#^p$ についても unknotting number が 2 である”固い” knot があることを示す。

まず $\#^p$-move が unknotting operation であることをみておこう。

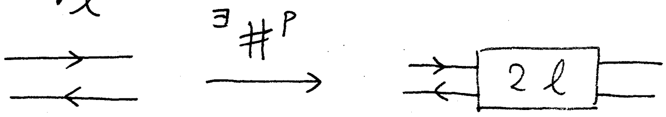
<u>Prop 5</u>　$^\forall$prime p　$\#^p$ は unknotting operation である。

<u>Proof</u>　$p=2$ のときは $\#^p$-move は  を含むので unknotting operation。よって p : odd とする。

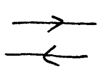
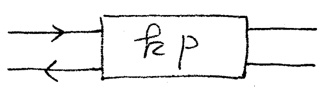
さて、



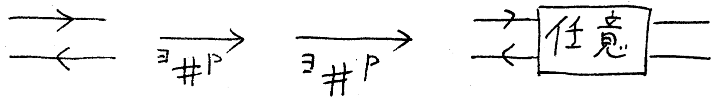
よって一般に　$\forall \ell$



$\left(\begin{array}{c}\#^p\text{-move} \\ 1回\end{array}\right)$。

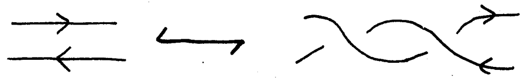
次に $^\forall k$, $\#^p$-move 1回で  を  に変えられること(*)を示す。

前に示したこととあわせると、p: odd のとき

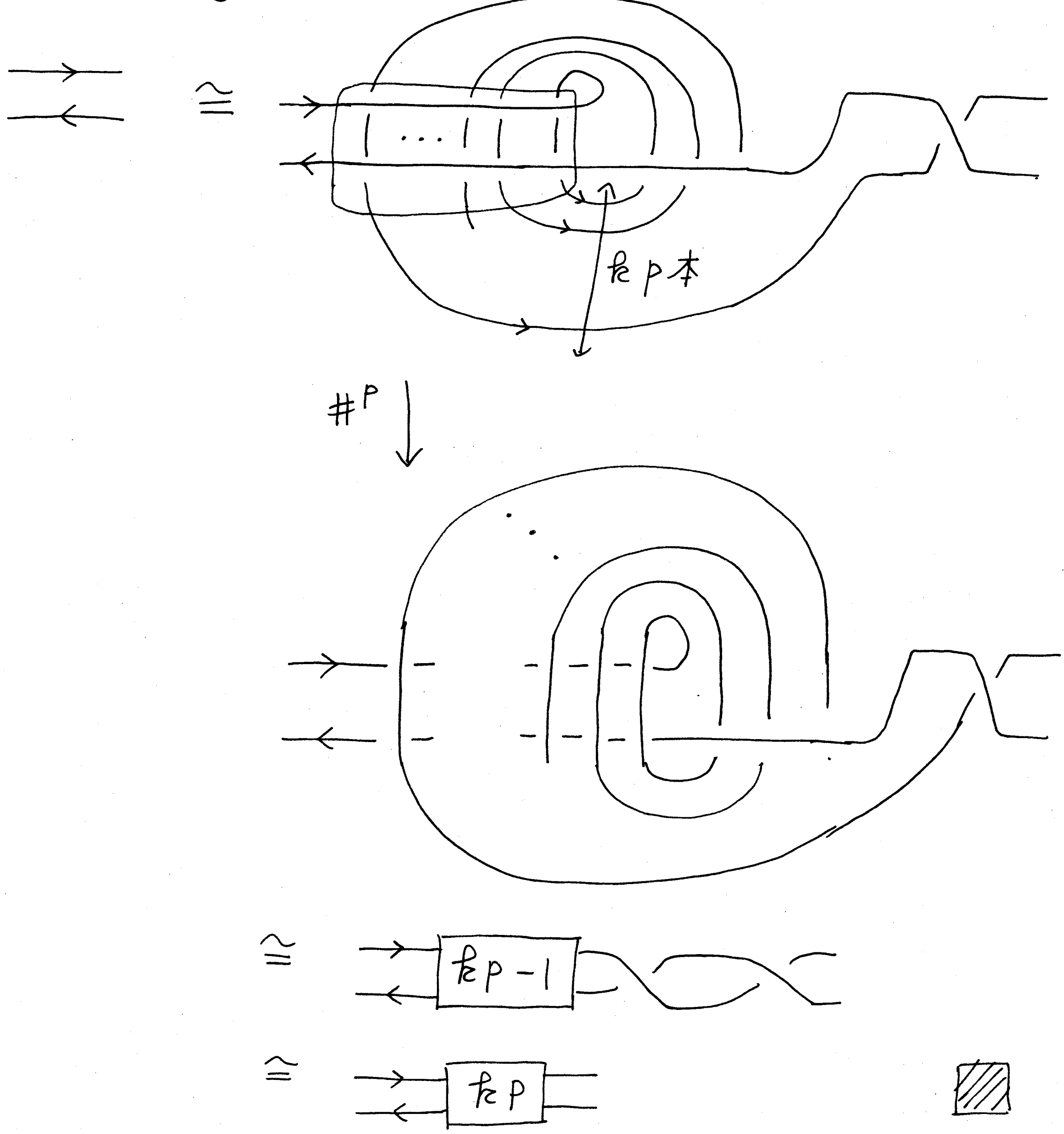


となる.

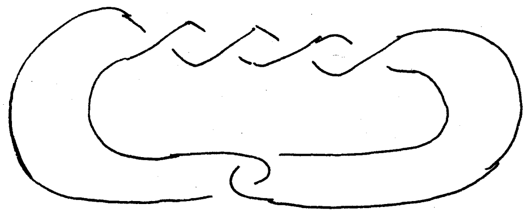
特に crossing change



が 2回の $\#^p$-move で実現できるので、$\#^p$ は unknotting operation とわかる. では (*) を確かめよう。



k を下図のような −2−twisted doubled knot とする.



k

Prop 6　$k\#k$ の $\#^p$-unknotting number は任意の p について 2 である。

Proof　$\#^p$-move 1回で k を trivial knot にできる（このとき $\varphi_{(k,p)}(0)=0$）ので、$k\#k$ の $\#^p$-unknotting number $= 2$ or 1。

"$=1$" とすると次のような列が得られる.

$$k\#k \xrightarrow{\#^p} 0 \xrightarrow{\#^p} k \xrightarrow{\#^p} k\#k$$

[安原] 定理6を用いて $\varphi_{(k\#k,p)}(0)=0$ を示す。

$p\neq 2$ のときは定理6(ii)により

$$\varphi \equiv \varphi_{k\#k}(0)+\varphi_0(k)+\varphi_k(k\#k)=0$$

しかし $\varphi_0(k)=\varphi_k(k\#k)=0$ なので $\varphi_{k\#k}(0)=0$.

$p=2$ のときは定理6(i)より

$$-6\le\varphi\le 6 \quad \text{かつ} \quad \varphi\equiv 0 \mod 8$$

∴ $\varphi=0$　よって前と同じように $\varphi_{k\#k}(0)=0$。

Prop 2 を $k\#k \xrightarrow{\#^{P}} 0$ に使うと $|\sigma_p(k\#k)| \leq 2$.
よって σ_p の加法性により $|\sigma_p(k)| = 0, 1$。しかし
直接計算すると $\sigma_p(k) = -2$ となるので矛盾。▨

注意 1. $k\#k$ の通常の unknotting number も2。

2. 上の議論の key point であった[安原]定理6 も4次元多様体の定理の帰結である。

参考文献

[Gilmer] P.Gilmer; Configurations of surfaces in 4-manifolds, Trans.AMS 264(1981), 353-380.

[Litherland] R.Litherland; Surgery on knots in solid tori, Proc.London.Math.Soc. 39(1979), 130-146.

[Murakami] H.Murakami; Some metrics on classical knot, Math.Ann. 270(1985), 35-45.

[Viro] O.Viro; Link types in codimension-2 with boundary, Uspeh Mat.Nauk 30(1975), 231-232.

[Wong] Y.L.Wong; Band-passes and the Arf invariant of a knot, thesis, University of California, Berkeley, 1988.

[安原] 安原 晃; 四次元から見た unknotting operatrions I, 本講究録.